Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ATI

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (12 questions) — **Page 3**

2. **Séries de Fourier d'une fonction périodique paire** (10 questions) — **Page 8**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 14**

Sujet officiel (PDF) : https://btsati.fr/assets/annales/bts-ati/E2 - Mathématiques/2023/BTS ATI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

On modélise, en centimètres, la distance entre le fond du tiroir et le fond du meuble pendant la fermeture, en fonction du temps en secondes. Les questions portent sur une équation différentielle, l'étude de la fonction obtenue, un algorithme de seuil et la position moyenne du tiroir.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On résout le trinôme caractéristique en le factorisant : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. On pose donc successivement $r + 1 = 0$, puis $r + 4 = 0$. Ces deux équations donnent les racines réelles distinctes du trinôme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. Le tableau fourni indique alors que toute solution de l'équation différentielle est une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines. Les constantes sont réelles et seront déterminées si des conditions initiales sont imposées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la situation initiale, où le point M est situé à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse négative de -10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction f représente la distance OM, exprimée en centimètres. À l'instant initial, M se trouve à 20 cm de O, donc la distance vaut 20. La dérivée de cette distance par rapport au temps est la vitesse, exprimée en cm·s^{-1}. Le mouvement vers O est donné comme négatif, avec une vitesse initiale de -10 cm·s^{-1}.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

Deux secondes après le début de la fermeture, on prend $t = 2$ dans l'expression donnée. On remplace aussi $-4t$ par -8 dans le second terme :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

Comme la fonction mesure la distance OM en centimètres, cette expression exacte donne directement la distance recherchée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$OM = \left(\frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}\right)$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.**

On évalue la distance à 4 secondes : $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm. Cette valeur est inférieure au seuil de 0,5 cm. De plus, f est continue et $f(0) = 20$ cm : la distance passe donc sous le seuil à un instant strictement antérieur à 4 secondes. L'affirmation du constructeur est vraie.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Oui, le tiroir est fermé avant 4 s, car $f(4) \approx 0{,}427 < 0{,}5$ cm.

Partie B

Question 1.a. **En utilisant la limite de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les deux exposants tendent vers $-\infty$. Par la limite rappelée dans le sujet, chacune des exponentielles tend vers zéro. Les coefficients étant constants, la somme et la différence des deux termes tendent également vers zéro.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est finie et vaut 0. Une fonction qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$ possède une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$. Ici, l'asymptote de la courbe représentative est donc l'axe des abscisses.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme à l'aide de $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Ainsi, la dérivée de e^{-t} est $-e^{-t}$, et celle de e^{-4t} est $-4e^{-4t}$. En tenant compte du signe négatif devant le second terme de f, on obtient l'expression de la dérivée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

On sait que $f'(t) < 0$ sur tout l'intervalle étudié. La fonction est donc strictement décroissante. Sa valeur initiale est $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ est 0. Le tableau résume ces informations sur $[0; +\infty[$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	$-$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

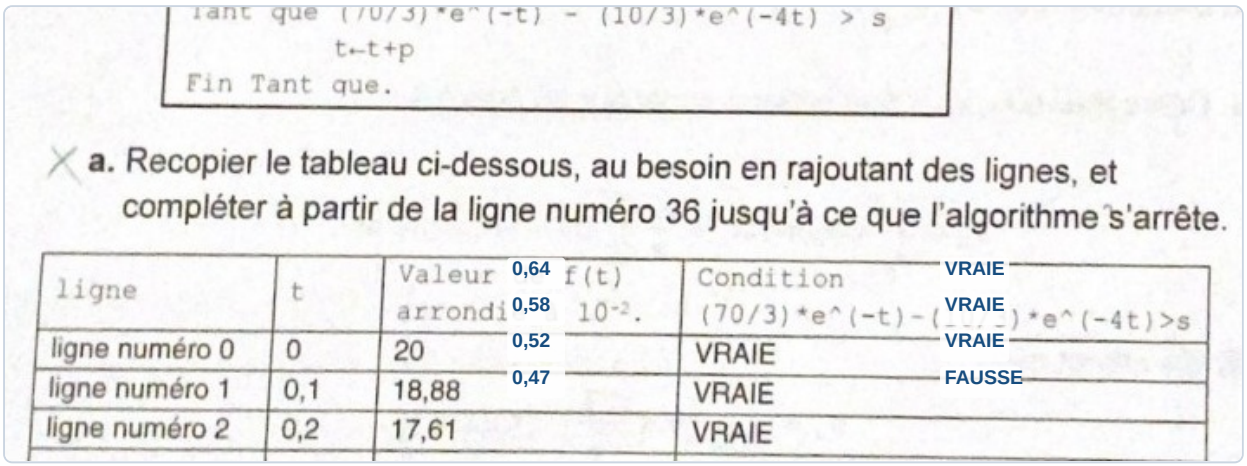
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes au besoin et en poursuivant jusqu'à l'arrêt. Indiquer les valeurs de f(t), arrondies au centième, et la valeur de vérité de la condition.**

L'algorithme teste si $f(t) > 0{,}5$, puis augmente t de 0,1 tant que cette condition est vraie. Les valeurs de la fonction sont arrondies au centième comme demandé. La première valeur de t pour laquelle le test est faux est 3,9 s : c'est cette ligne qui provoque l'arrêt.

Ligne	t	$f(t)$, au centième	Condition
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété



Tant que (70/3)*e^(-t) - (10/3)*e^(-4t) > s
t←t+p
Fin Tant que.

a. Recopier le tableau ci-dessous, au besoin en rajoutant des lignes, et compléter à partir de la ligne numéro 36 jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

ligne	t	Valeur arrondi 10^{-2}. f(t)	Condition (70/3)*e^(-t)-(...)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE

0,64 VRAIE
0,58 VRAIE
0,52 VRAIE
0,47 FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ligne 36 : 0,64, VRAIE. Ligne 37 : 0,58, VRAIE. Ligne 38 : 0,52, VRAIE. Ligne 39 : 0,47, FAUSSE.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La boucle se poursuit tant que la distance calculée est strictement supérieure à 0,5 cm. Elle est encore supérieure au seuil à $t = 3{,}8$ s, puis devient inférieure à ce seuil à $t = 3{,}9$ s. À cette dernière ligne, la condition est fausse et l'algorithme s'arrête. La variable conserve donc la valeur 3,9.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Question 4. La position moyenne est définie par m = (1/4)$\int_0^4$ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e^{-4} + (5/24)e^{-16}.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$, car la dérivée de chaque terme redonne le terme correspondant de f. La moyenne vaut donc $m = \frac{1}{4}(F(4) - F(0))$. En remplaçant les bornes, puis en regroupant les termes constants et exponentiels, on obtient l'expression demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$ cm.

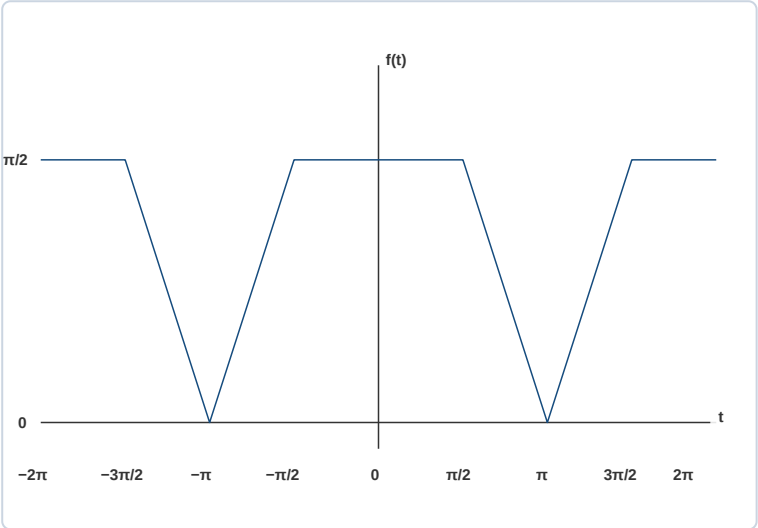
2. Séries de Fourier d'une fonction périodique paire

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. À partir de son graphique et du formulaire de Fourier, il faut déterminer des coefficients, construire une somme partielle et évaluer l'erreur d'une approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

La fonction est paire et de période 2π. Sur une période, elle vaut $\pi/2$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$, puis décroît jusqu'à 0 en π, avant de remonter par symétrie. On répète ce motif sur $[-2\pi, 2\pi]$. Les points de changement de pente sont espacés de $\pi/2$; les minima sont en $-\pi$ et π.

Graphe de f sur [-2π ; 2π]



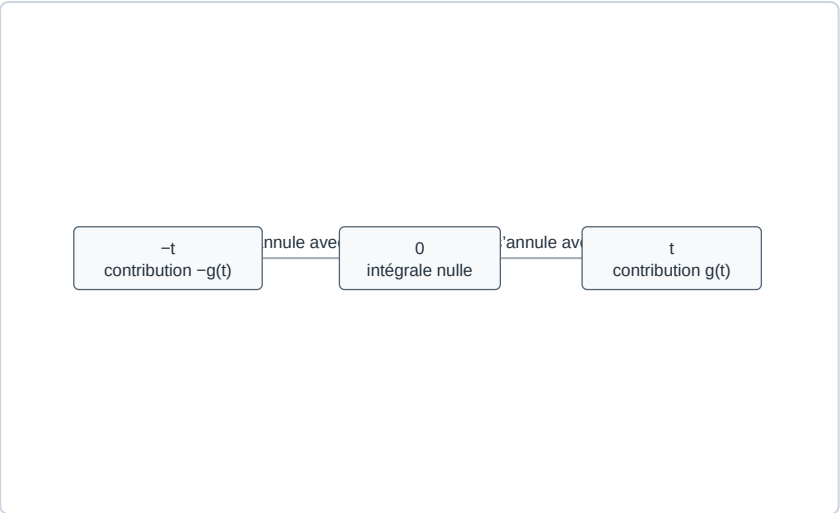
✓ RÉPONSE À RETENIR

Graphe pair et périodique, avec des zéros en $\pm\pi$ et des paliers de hauteur $\pi/2$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Pour tout $n \geq 1$, le coefficient est proportionnel à l'intégrale de $f(t)\sin(nt)$ sur une période. Comme f est paire et $\sin(nt)$ impaire, leur produit est impair. Sur l'intervalle symétrique $[-\pi, \pi]$, ses valeurs en t et $-t$ se compensent. L'intégrale est donc nulle, ce qui entraîne l'annulation de chaque coefficient sinus.

Annulation des contributions impaires



g(t) = f(t) sin(nt) est impaire.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La pulsation et la période sont reliées par $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Ici, la fonction a pour période $T = 2\pi$. En remplaçant dans la relation du formulaire, le facteur 2π se simplifie et donne la pulsation associée.

Période et pulsation

Grandeur	Relation	Valeur
Période	T	2π
Pulsation	ω = 2π/T	1

La pulsation associée à une période 2π vaut 1.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$ rad par unité de temps.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 vaut 3π/8.

Le formulaire donne $a_0 = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Par périodicité et parité, cela devient $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0, \pi/2]$, l'intégrale vaut $\pi^2/4$. Sur $[\pi/2, \pi]$, elle vaut $\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt = \pi^2/8$. Leur somme, divisée par π, donne le résultat.

Calcul de la moyenne a_0

Intervalle	Expression de f(t)	Intégrale
[0 ; π/2]	π/2	π²/4
[π/2 ; π]	π − t	π²/8
Total sur [0 ; π]		3π²/8

La moyenne sur une période est l'intégrale sur [0 ; π], divisée par π.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \dfrac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.

La fonction étant paire, le formulaire donne $a_n = \dfrac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, le facteur vaut $2/\pi$. On sépare ensuite l'intégrale aux deux expressions de f : $\pi/2$ sur $[0, \pi/2]$ et $\pi - t$ sur $[\pi/2, \pi]$. Le premier facteur se simplifie avec $\pi/2$.

Découpage de l'intégrale de Fourier

Intervalle	f(t)	Contribution à a_n
[0 ; π/2]	π/2	∫₀^(π/2) cos(nt) dt
[π/2 ; π]	π − t	(2/π)∫_(π/2)^π (π − t)cos(nt) dt

Le facteur global 2/π est appliqué après le découpage.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$, pour $n \geq 1$.

Question 6. En admettant que aₙ = 2/(πn²)[cos(nπ/2) - cos(nπ)], déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.

On substitue successivement $n = 1, 2, 3$ dans la formule donnée. Les différences de cosinus sont respectivement $\cos(\pi/2) - \cos(\pi) = 1$, $\cos(\pi) - \cos(2\pi) = -2$ et $\cos(3\pi/2) - \cos(3\pi) = 1$. En tenant compte du facteur $2/(\pi n^2)$, on obtient les trois valeurs exactes.

Coefficients de Fourier calculés

n	Différence des cosinus	a_n
1	1	2/π
2	−2	−1/π
3	1	2/(9π)

Valeurs exactes obtenues par substitution dans la formule.

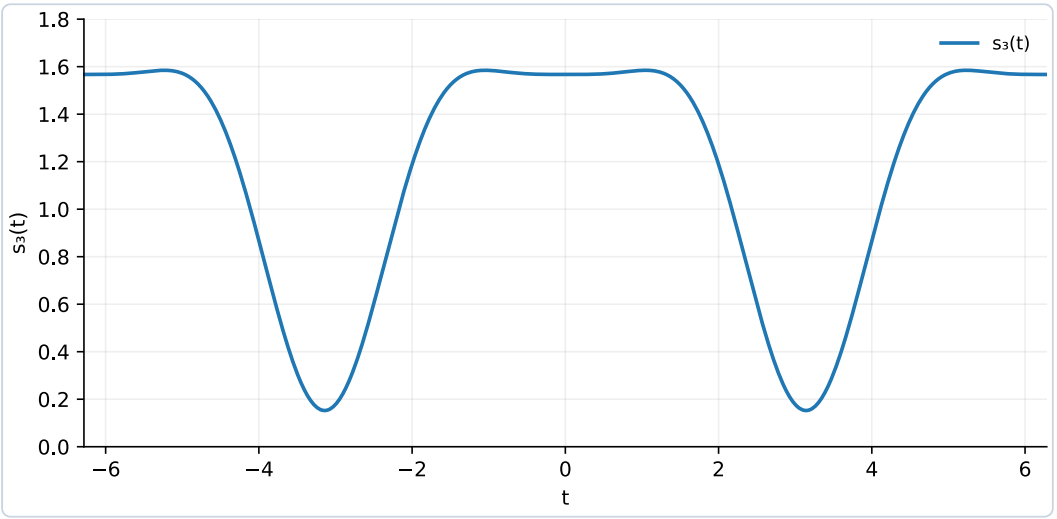
✓ RÉPONSE À RETENIR

$$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$$

Question 7. En déduire que $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

La somme partielle d'ordre 3 s'écrit $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(nt)$, puisque les coefficients sinus sont nuls. On y remplace a_0 par $3\pi/8$, puis a_1, a_2, a_3 par les valeurs déterminées à la question précédente. On retrouve ainsi l'expression demandée.

Somme partielle $s_3(t)$



Tracé de la somme partielle donnée, sur deux périodes.

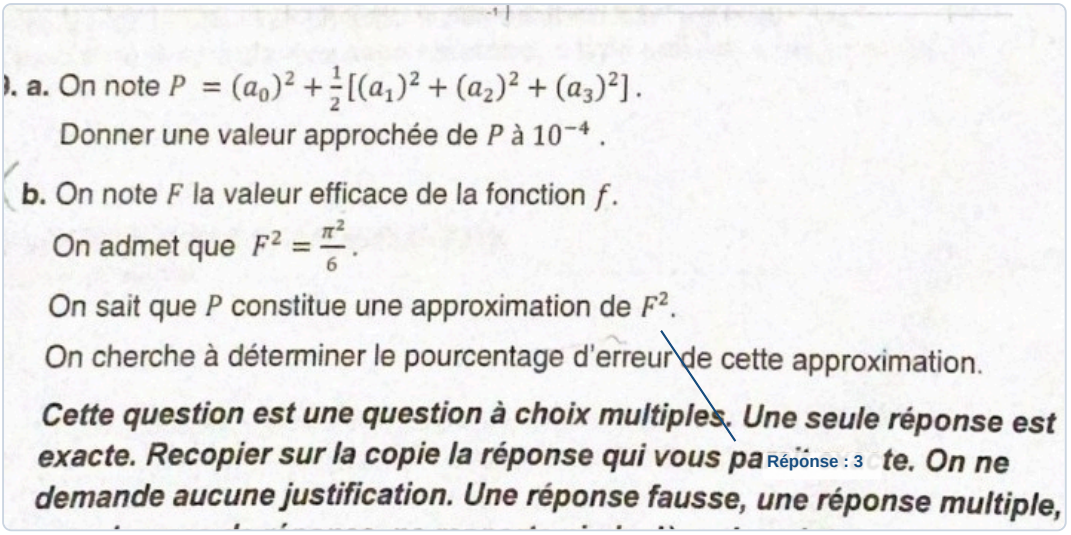
✓ RÉPONSE À RETENIR

$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées représente la fonction s_3.

La somme partielle est paire et périodique. Son maximum est près de $t = 0$, et ses minima sont près de $t = \pm\pi$, sans atteindre zéro. Parmi les trois tracés, la courbe numéro 3 présente cette forme aplatie avec des creux arrondis aux abscisses $\pm\pi$.

Courbe représentant s_3

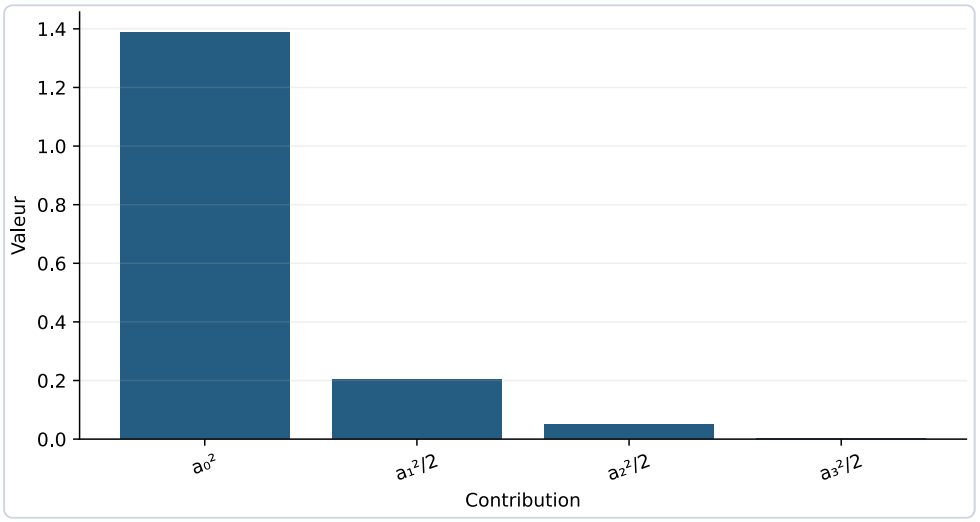


✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour P = (a₀)² + 1/2[(a₁)² + (a₂)² + (a₃)²], donner une valeur approchée de P à 10⁻⁴ près.

On utilise les coefficients exacts : $P = (3\pi/8)^2 + \frac{1}{2}[(2/\pi)^2 + (-1/\pi)^2 + (2/(9\pi))^2]$. Le premier terme vaut environ $1{,}3879$, et les trois contributions entre crochets, après multiplication par $1/2$, valent environ $0{,}2558$. La somme arrondie au dix-millième donne la valeur demandée.



Contributions à P, dont la somme vaut environ 1,6437.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. Sachant que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F², choisir le pourcentage d'erreur correspondant parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.

L'écart relatif est $\frac{|F^2 - P|}{F^2} \times 100$. En utilisant $F^2 = \pi^2/6$ et la valeur non arrondie de P, on obtient environ $0{,}0739\,\%$. Parmi les trois choix proposés, cette erreur correspond à l'option $0{,}1\,\%$.

Choix du pourcentage d'erreur

Option	Réponse
0,1 %	Retenue
1 %	
10 %	

L'erreur calculée est d'environ 0,0739 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

0,1 %

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures et son coefficient varie selon la spécialité : 1,5 ou 2. Elle propose deux exercices notés sur 10 : modéliser la fermeture d'un tiroir par une équation différentielle, puis étudier les séries de Fourier d'une fonction périodique paire, ses coefficients et l'erreur d'approximation.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y'' + 5y' + 4y = 0, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La distance du tiroir est modélisée par $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$.
- Pour une fonction paire, les coefficients b_n sont nuls et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.
- La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \Sigma_{n=1}^{3}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance f(0) de la vitesse f'(0), en respectant leurs unités et le signe de la vitesse.
- Pour l'algorithme, tester la condition après chaque incrément de 0,1 et relever la valeur finale de t.
- Exploiter la parité et la période avant de calculer les coefficients de Fourier.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer P à F^2 et rapporter l'écart à la valeur de référence.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution générale de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines déterminent les exponentielles de la solution générale. Les conditions initiales sur la distance et la vitesse permettent ensuite de calculer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice de Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nωt) est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur une période symétrique est nulle. D'après la formule des coefficients de Fourier, on obtient $b_n = 0$ pour tout n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment compléter le tableau de l'algorithme sans manquer son arrêt ?

Partir de t = 0, évaluer f(t), puis augmenter t de 0,1 tant que f(t) est supérieure à 0,5. Noter les valeurs arrondies au centième et tester la condition à chaque étape, y compris à la valeur finale.

Q : Quelles consignes particulières s'appliquent à la question 9.b ?

La question 9.b est un choix multiple : une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée. Selon l'énoncé, une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni ne retire de point.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsati.fr/assets/annales/bts-ati/E2 - Mathématiques/2023/BTS ATI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Assistance Technique d\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.