Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction** (14 questions) — Page 3

2. **Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance** (10 questions) — Page 7

3. **Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — Page 10

Sujet officiel (PDF) : https://btsati.fr/assets/annales/bts-ati/E2 - Mathématiques/2023/BTS ATI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir, repéré par M, et le fond du meuble, repéré par O, est modélisée en fonction du temps. L’exercice étudie la résolution de l’équation différentielle, la fermeture du tiroir, les variations de la fonction, un algorithme et le développement limité au voisinage de zéro.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Ainsi, les solutions sont $\frac{-5-\sqrt{9}}{2}$ et $\frac{-5+\sqrt{9}}{2}$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -4$ ou $r = -1$.

Question 1.b. À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L’équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. Le tableau fourni donne alors une combinaison linéaire des exponentielles associées aux deux racines.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la position initiale du point M et de sa vitesse à l’instant t = 0, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

À l’instant initial, la distance OM vaut 20 cm. La dérivée de cette distance représente la vitesse du point M : celle-ci est négative et égale à -10 cm·s^{-1}.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. En utilisant l’expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l’expression donnée : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. C’est la distance exacte en centimètres.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\mathrm{OM} = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}157$ cm.

Question 3. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.

La fonction est strictement décroissante : $f'(t) = \frac{e^{-4t}}{3}(40 - 70e^{3t}) < 0$ pour $t \geq 0$. À 4 secondes, $f(4) \approx 0{,}427$ cm, donc la distance a déjà franchi le seuil de 0,5 cm avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B

Question 1.a. En rappelant que la limite de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞ est nulle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Lorsque $t \to +\infty$, les deux exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0. La somme de leurs multiples tend donc également vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de la limite de f que sa courbe représentative possède une asymptote, puis en donner une équation.

Une limite finie de $f(t)$ en $+\infty$ donne une asymptote horizontale, dont l'équation est $y = \lim_{t \to +\infty} f(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle avec $(e^{at})' = ae^{at}$: le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$, et le second $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ est 0.

t	**0**	$+\infty$
Variation de f	20	$\searrow 0$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 0 sur $[0;+\infty[$.

Question 3.a. **Recopier le tableau de l'algorithme et le compléter à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire. Indiquer les valeurs de f(t) arrondies à 10^{-2} et l'état de la condition jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.**

La boucle s'arrête dès que $f(t) \leq 0{,}5$. Les valeurs arrondies au centième et l'état de la condition sont :

Ligne	t **(s)**	$f(t)$	**Condition** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$ s.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

À $t = 3{,}8$, la condition est encore vraie. Après une dernière augmentation de 0,1 s, elle devient fausse à $t = 3{,}9$: la distance est alors inférieure à 0,5 cm.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé, avec $\mathrm{OM} \approx 0{,}47$ cm.

Question 4.a. **À partir de la partie régulière du développement limité fournie, déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.**

La partie régulière du développement limité est $20 - 10t - 15t^2$. La tangente en 0 passe par le point d'ordonnée 20 et son coefficient directeur est le coefficient de t, soit -10.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 10t$.

Question 4.b. Parmi les propositions à choix multiples, recopier l'unique développement limité à l'ordre deux de f au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

Le développement limité à l'ordre deux reprend le polynôme donné et ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4.c. Choisir l'affirmation correcte concernant la position de la courbe par rapport à sa tangente T au voisinage de zéro : au-dessus ou en dessous.

La tangente est $T(t) = 20 - 10t$. Or $f(t) - T(t) = t^2(-15 + \varepsilon(t))$, quantité négative pour $t > 0$ suffisamment proche de 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Au voisinage de 0, la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de T.

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance

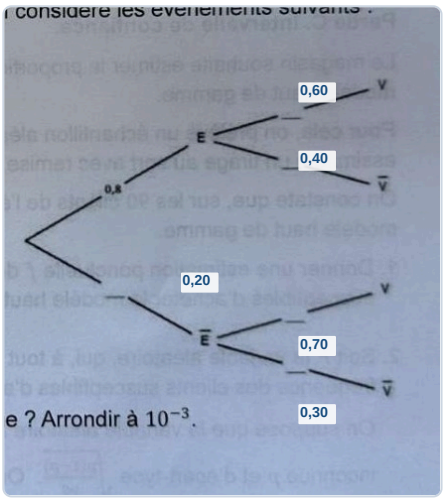
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques à des clients dans l'espoir de réaliser une vente, avec des probabilités de vente différentes selon le type de vélo. L'exercice étudie aussi les durées de réparation sur un échantillon de vélos et l'estimation de la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A : Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et le résultat du prêt, vente ou absence de vente.

Les probabilités des deux branches issues d'un même nœud totalisent 1. Après un vélo électrique, l'absence de vente a donc une probabilité de 0,40 ; après un vélo mécanique, elle vaut 0,30.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Électrique : 0,80 ; mécanique : 0,20. Après électrique : vente 0,60, absence 0,40. Après mécanique : vente 0,70, absence 0,30.

Question 2. Déterminer la probabilité qu'un vélo prêté soit électrique et que le prêt débouche sur une vente, soit P(E ∩ V).

La probabilité du chemin « électrique, puis vente » est le produit des probabilités de ses branches : $P(E \cap V) = P(E) \times P(V \mid E) = 0,80 \times 0,60 = 0,48$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \cap V) = 0,48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Les deux chemins menant à une vente sont incompatibles : vente après un prêt électrique ou après un prêt mécanique. Ainsi, $P(V) = 0,80 \times 0,60 + 0,20 \times 0,70 = 0,62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0,62$.

Question 4. **Sachant que le prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

Par définition de la probabilité conditionnelle, $P(E \mid V) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,7741935$. Arrondie au millième, la probabilité vaut 0,774.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(E \mid V) \approx 0,774$.

Partie B : Loi binomiale

Question 1. **On admet que X, le nombre de vélos parmi un échantillon de 80 dont la réparation a nécessité moins d'une heure de main-d'œuvre, suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.**

Chaque réparation est une épreuve de Bernoulli, où le succès « moins d'une heure » a une probabilité de 0,62. Le nombre de succès parmi 80 réparations suit donc une loi binomiale de paramètres 80 et 0,62.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$.

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.**

Avec une loi binomiale de paramètres 80 et 0,62, $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(0,38)^{40} \approx 0,008287$. À 10^{-3} près, on obtient 0,008.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. **Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de réparations ayant nécessité moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de réparations ayant nécessité plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.**

Si X réparations durent moins d'une heure, alors $80 - X$ durent plus d'une heure. La condition demandée est $X > 80 - X$, soit $X > 40$. On calcule donc $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40) \approx 0,981$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité demandée est $0,981$.

Partie C : Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée parmi les 90 clients : $\hat{p} = \dfrac{54}{90} = 0,60$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\hat{p} = 0,60$, soit 60 %.

Question 2.a. **En utilisant la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.**

Avec $f = 0,60$ et $n = 90$, la marge est $1,96\sqrt{\dfrac{0,60(1-0,60)}{90}} \approx 0,1012$. L'intervalle fourni est donc $[0,60 - 0,1012\ ;\ 0,60 + 0,1012]$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\ ;\ 0,701]$.

Question 2.b. **Dire si l'on est certain que la proportion p appartient à cet intervalle de confiance.**

Le niveau de confiance de 95 % décrit la fiabilité de la méthode sur des échantillons répétés. Il ne garantit pas que la proportion inconnue appartienne à l'intervalle calculé pour cet échantillon.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, on ne peut pas en être certain.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, durée 2 heures; coefficient 2, porté à 3 pour les deux options de Traitement des matériaux. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, mobilisent équation différentielle, étude de fonction et développements limités, puis probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance dans les contextes d'un tiroir et d'un magasin de vélos.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ sont -1 et -4, donc la solution générale est $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-4t}$.
- La distance est $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$; elle tend vers 0 et sa courbe admet l'asymptote horizontale $y = 0$.
- Une variable binomiale compte les succès de n essais indépendants de probabilité p; ici, X suit la loi B(80 ; 0,62).
- Une estimation ponctuelle est la fréquence observée; l'intervalle fourni est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$, avec $f = 54/90$ et $n = 90$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter le signe de la vitesse vers O lors de l'identification de f'(0), et distinguer vitesse et distance.
- Pour la fermeture, comparer la distance au seuil strict de 0,5 cm et vérifier si le temps correspondant est inférieur à 4 secondes.
- Dans l'algorithme, incrémenter t de 0,1 puis contrôler la condition de boucle à chaque étape jusqu'à ce qu'elle devienne fausse.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence observée et distinguer un niveau de confiance de la certitude que p appartient à l'intervalle.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$, dont les racines sont -1 et -4. La solution générale combine e^{-t} et e^{-4t}; les conditions initiales permettent ensuite de déterminer les constantes.

Q : Comment traduire la comparaison des durées de réparation avec X ?

X représente le nombre de réparations de moins d'une heure parmi 80. Pour traiter la comparaison demandée, exprimez aussi le nombre de réparations de plus d'une heure selon la répartition retenue, puis traduisez la stricte inégalité avant de calculer la probabilité.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties indiquées peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices, avancez sur les questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier calculs, unités et arrondis.

Q : Faut-il justifier les réponses aux questions à choix multiples sur le développement limité ?

Pour les questions 4.b et 4.c de l'exercice 1, le sujet précise qu'il faut recopier la réponse choisie et qu'aucune justification n'est demandée. Les autres consignes doivent être accompagnées des démarches ou justifications explicitement sollicitées.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsati.fr/assets/annales/bts-ati/E2 - Mathématiques/2023/BTS ATI - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Assistance Technique d\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.