Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ATI

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant le freinage** (12 questions) — **Page 3**

2. **Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsati.fr/assets/annales/bts-ati/E2 - Mathématiques/2022/BTS ATI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant le freinage

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m·s⁻¹, est ralenti par un système de freinage et sa vitesse f(t) est étudiée en fonction du temps. Les questions mobilisent une équation différentielle, les variations et la limite de f, le calcul d'une distance, puis le développement limité et la tangente à sa courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

La formule fournie donne les solutions de l'équation homogène sous la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient de y est $a = 0,8$. On remplace donc a par cette valeur dans la formule. Aucune condition initiale n'est demandée ici : la constante reste arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Pour g définie par g(t) = 5, vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En remplaçant y par g dans l'équation (E), le membre de gauche devient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Il est égal au membre de droite pour tout $t \geq 0$. La fonction proposée vérifie donc bien l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de (E), car $g'(t) + 0,8g(t) = 4$.

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

L'équation homogène associée a pour solutions $y_h(t) = ke^{-0,8t}$. D'autre part, la fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). Toute solution de l'équation complète s'obtient en ajoutant cette solution particulière à une solution de l'équation homogène. La constante réelle k est libre tant qu'aucune condition initiale n'est imposée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

D'après la solution générale, $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. À l'instant initial, $e^0 = 1$, donc la condition $f(0) = 20$ donne $k + 5 = 20$. On en déduit $k = 15$, puis on remplace la constante dans l'expression générale. Cette valeur détermine l'unique solution qui satisfait la condition initiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. À partir de f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Par passage à la limite dans l'expression de f, le terme exponentiel disparaît et il reste la constante 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. Une courbe représentative admet alors une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite. On écrit l'équation de cette droite en prenant l'ordonnée constante correspondante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	5

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0;+[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse devenait nulle à un instant fini. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$: la vitesse ne s'annule jamais. Elle se rapproche de $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sans atteindre cette valeur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. Pour F définie par F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée de l'exponentielle composée est $(e^{-0,8t})' = -0,8e^{-0,8t}$. Ainsi, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$, donc F est bien une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$.

Question 4.b. En utilisant d = ∫ de t_0 à t_1 f(t)dt, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t_0 = 0 et t_1 = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

Par le théorème fondamental de l'analyse, $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Cette expression exacte vaut environ $15,3251$ mètres. L'arrondi au centimètre s'obtient en gardant deux chiffres après la virgule.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir parmi les propositions le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte, à recopier sans justification.

Le développement limité affiché par le logiciel a pour partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste doit s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions, il faut donc choisir celle qui contient ces coefficients et cette forme du reste.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. On connaît $f(0) = 20$, et la dérivée donnée fournit $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par $(0; 20)$ et son coefficient directeur est -12.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique

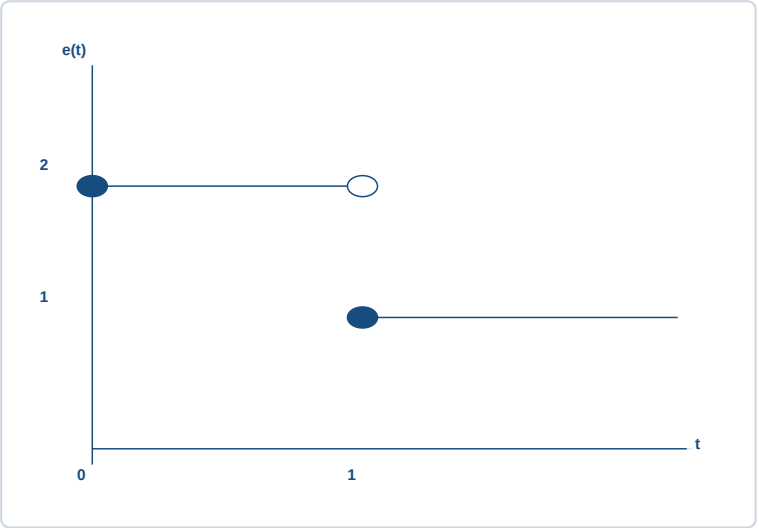
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1), où U est la fonction échelon unité, et sa fonction de transfert est H(p) = 1/(p + 1). Les questions portent sur la transformée de Laplace du signal d'entrée, la détermination de la sortie s(t) et la représentation de ses courbes.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Pour $t < 0$, l'entrée est nulle. À partir de $t = 0$, $e(t)$ vaut 2 jusqu'à l'instant 1 exclu. À $t = 1$, l'échelon retardé s'active et le signal descend à 1. Le tracé doit donc montrer les sauts en 0 et en 1, en respectant les valeurs prises exactement à ces instants.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ pour $t < 0$, 2 pour $0 \le t < 1$, puis 1 pour $t \ge 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Par linéarité, la transformée de $e(t) = 2U(t) - U(t - 1)$ est la différence des transformées de ses deux échelons. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. Ainsi, on obtient directement la transformée d'entrée, pour les valeurs de p où ces expressions sont définies.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

La fonction de transfert vérifie $S(p) = H(p)E(p)$. En utilisant $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = (2 - e^{-p})/p$, on multiplie les deux expressions :

$$S(p) = \frac{1}{p+1}\left(\frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p}\right) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{1}{p(p+1)}e^{-p}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur. Le numérateur obtenu est $(p+1) - p = 1$, ce qui redonne exactement le membre de gauche :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1) - p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e⁻ᵖ et de [1/(p + 1)]e⁻ᵖ.

Les deux premières transformées se lisent directement dans le formulaire. Pour les deux dernières, on applique la propriété de retard : multiplier une transformée par e^{-p} décale d'une unité la fonction inverse et introduit $U(t-1)$.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition précédente s'écrit $S(p) = 2/p - 2/(p+1) - e^{-p}/p + e^{-p}/(p+1)$. Pour $0 \leq t < 1$, les termes retardés sont nuls puisque $U(t-1) = 0$. Les deux premiers termes donnent donc $s(t) = 2U(t) - 2e^{-t}U(t)$, soit l'expression suivante sur l'intervalle demandé.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), donner sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.**

1. À l'instant $t = 1$, on utilise la formule donnée pour $t \geq 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$.
2. Comme $e/e = 1$, cela se simplifie en $s(1) = 2 - 2/e$. Numériquement, cette valeur est environ 1,264 ; arrondie au dixième, elle vaut 1,3.

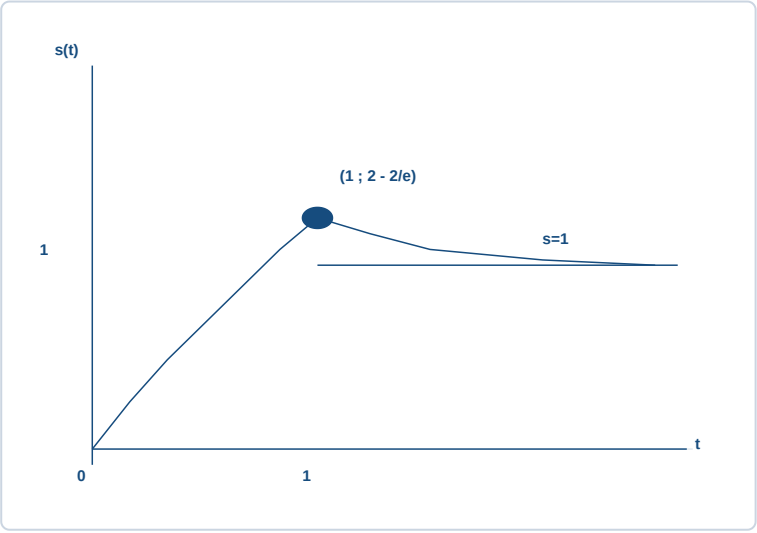
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$ au dixième.

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0, 1[$, la sortie augmente selon $2(1 - e^{-t})$ et atteint en $t = 1$ la valeur $2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, elle suit $1 + (e - 2)e^{-t}$, décroît et se rapproche de 1. Le tracé ci-dessous indique le point de raccordement et l'asymptote horizontale.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe part de $(0, 0)$, passe par $(1, 2 - 2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression donnée est $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$. Le facteur $e - 2$ est constant et e^{-t} tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Le terme exponentiel disparaît donc à la limite, tandis que le terme constant reste égal à 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Deux exercices étudient le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, en évaluant équations différentielles, fonctions, intégrales et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution particulière s'ajoute aux solutions de l'équation homogène y' + ay = 0.
- Si f(t) tend vers L à l'infini, la courbe admet une asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$.
- La transformée de Laplace de f(t - a)U(t - a) est $F(p)e^{-ap}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser la condition initiale f(0) = 20 pour déterminer la constante de la solution de l'équation différentielle.
- Justifier les variations à partir du signe de la dérivée et traiter séparément la limite en +∞.
- Pour la distance, évaluer une primitive aux deux bornes et arrondir au centimètre comme demandé.
- Pour un décalage temporel, associer correctement le facteur e^{-ap} à la fonction multipliée par U(t - a).

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du premier exercice ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Utilisez ensuite la condition f(0) = 20 pour déterminer la constante.

Q : Comment appliquer le décalage temporel dans l'exercice sur Laplace ?

Le formulaire associe f(t - a)U(t - a) à $F(p)e^{-ap}$. Identifiez la fonction de départ et le décalage a, puis appliquez cette propriété aux termes concernés avant de calculer la transformée inverse.

Q : Combien de temps et de points faut-il prévoir pour les exercices ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points chacun. Le sujet ne fixe pas de temps par exercice : répartissez votre durée selon l'avancement et gardez du temps pour vérifier les calculs et les tracés.

Q : Le coefficient est-il le même pour les deux spécialités ?

Non. Le sujet indique un coefficient de 1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 pour Électrotechnique. Les tracés demandés doivent être réalisés sur le document-réponse mentionné dans l'énoncé.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsati.fr/assets/annales/bts-ati/E2 - Mathématiques/2022/BTS ATI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Assistance Technique d\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.