Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ATI

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour la plupart des spécialités ; 3 pour Traitement des matériaux**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsati.fr/assets/annales/bts-ati/E2 - Mathématiques/2022/BTS ATI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m/s ralentit sous l'action d'un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L'exercice étudie cette fonction, la distance parcourue et son développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 en utilisant la formule fournie.

La formule fournie donne les solutions de $y' + ay = 0$ sous la forme $y(t) = ke^{-at}$, avec k constante réelle. Ici, $a = 0,8$. On remplace donc directement a par $0,8$ dans cette expression pour obtenir toutes les solutions de l'équation homogène sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. Vérifions l'équation en substituant ses valeurs :

$$g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4.$$

Le membre de gauche est bien égal au second membre pour tout t. Ainsi, $g(t) = 5$ est une solution de l'équation différentielle (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

$$y(t) = 5 + ke^{-0,8t}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

En effet, toute solution de l'équation avec second membre s'obtient en ajoutant à la solution particulière constante $g(t) = 5$ une solution de l'équation homogène associée. Cela donne bien l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

1. La solution générale est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$.
2. La condition $f(0) = 20$, avec $e^0 = 1$, donne $k + 5 = 20$, donc $k = 15$.

En remplaçant k dans la solution générale, on obtient la fonction correspondant à la vitesse initiale du chariot.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5, sachant que f(t) = 15e^(-0,8t) + 5.**

Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers 0. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, il ne reste alors que le terme constant. La limite de la vitesse est donc égale à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de la limite obtenue que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie. La courbe C se rapproche donc, lorsque t augmente, de la droite horizontale d'ordonnée 5. Cette droite est l'asymptote horizontale de C en $+\infty$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **À l'aide de l'expression admise de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. Elle vaut $f(0) = 20$ au départ et tend vers 5 en $+\infty$.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	5

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. La vitesse $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ vérifie donc :

- $f(t) > 5$, donc $f(t) > 0$ à tout instant ;
- $f(t)$ tend vers 5 sans atteindre 0.

Dans le cadre de ce modèle, le chariot ne s'arrête donc pas.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Non : la vitesse ne s'annule jamais et tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive la fonction proposée en appliquant la dérivation de l'exponentielle composée :

$$F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5.$$

Or $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Ainsi, $F'(t) = f(t)$ sur $[0; +\infty[$, ce qui prouve que F est une primitive de f.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$F'(t) = f(t)$: F est bien une primitive de f.

Question 4.b. En utilisant la primitive F et la formule de l'énoncé, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse. Avec la primitive F, on calcule $d = F(1) - F(0)$:

$$d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}.$$

Cette expression donne la valeur exacte en mètres. L'arrondi au centimètre consiste à arrondir au centième de mètre.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$, au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : recopier l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro, sans justification.

$20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. On lit $f(0) = 20$, et l'expression donnée de la dérivée donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans la formule, on obtient l'équation de la tangente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = -12t + 20$.

2. Contrôle de conformité et durée de vie de produits industriels

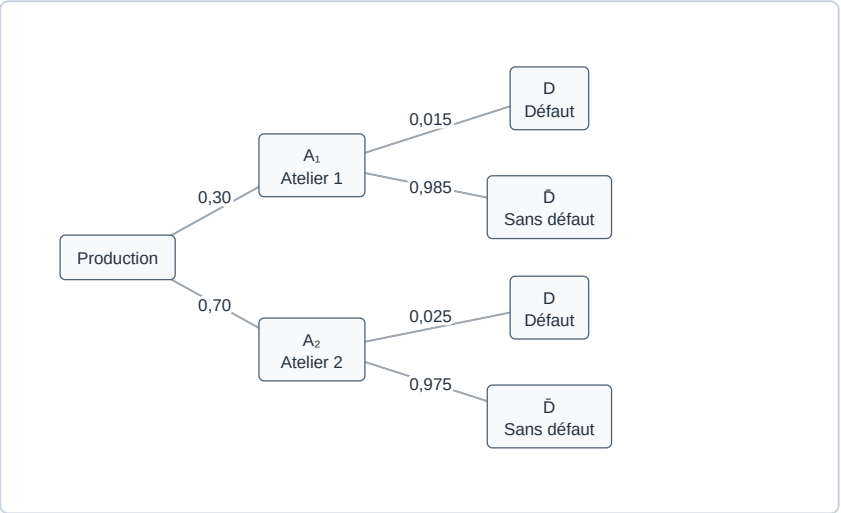
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut distincts, étudiés par les probabilités conditionnelles. L'exercice porte aussi sur la durée de fonctionnement des tubes modélisée par une loi exponentielle, puis sur l'estimation de la proportion de rivets conformes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation à partir des événements A_1, A_2 et D définis dans l'énoncé et des proportions de production et taux de défaut des deux ateliers.

On sépare d'abord la production entre les deux ateliers : 30 % pour l'atelier 1 et 70 % pour l'atelier 2. Depuis chacun, on distingue les tubes défectueux et ceux sans défaut. Les probabilités conditionnelles de défaut sont respectivement 0,015 et 0,025 ; leurs complémentaires sont 0,985 et 0,975. L'arbre ci-dessous porte ces probabilités sur chaque branche.

Arbre pondéré des ateliers et défauts



Les probabilités des branches issues d'un même nœud ont pour somme 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1)=0{,}30$; $P(A_2)=0{,}70$; $P(D|A_1)=0{,}015$; $P(\bar{D}|A_1)=0{,}985$; $P(D|A_2)=0{,}025$; $P(\bar{D}|A_2)=0{,}975$.

Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$, correspondant au fait que le tube provient de l'atelier 1 et présente un défaut.

L'événement recherché correspond au parcours « atelier 1 », puis « défaut ». La probabilité de l'intersection se calcule en multipliant la proportion de production de l'atelier 1 par son taux conditionnel de défaut : $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Cela représente 0,45 % de la production totale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que P(D) = 0,0195, comme indiqué dans l'énoncé. Cette valeur imprimée est incohérente avec les proportions et les taux de défaut fournis.**

Par la formule des probabilités totales, $P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2)$. En utilisant les deux parts de production et les taux de défaut de l'énoncé : $P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$. La valeur 0,0195 ne peut donc pas être obtenue avec ces données. Sur la page originale, elle est d'ailleurs corrigée à la main en 0,0220.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 % ; la valeur 0,0195 est erronée.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 2 sachant qu'il est sans défaut. L'intersection vaut $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0,70 \times 0,975 = 0,6825$. La probabilité de ne pas avoir de défaut est $1 - P(D) = 1 - 0,022 = 0,978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0,6825}{0,978} \approx 0,698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **Pour la durée de bon fonctionnement T, qui suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001, déterminer l'espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Avec $\lambda = 0,001$, on obtient $E(T) = \dfrac{1}{0,001} = 1\,000$ heures. Cette valeur est la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes produits. Elle décrit la moyenne de la population, et non la durée exacte de fonctionnement de chaque tube.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La formule donnée est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour une loi continue, les probabilités $P(T < 8\,000)$ et $P(T \leq 8\,000)$ sont identiques. On calcule donc $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0,99966$. Arrondi au centième, le résultat est 1,00.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1,00$ au centième.

Question 3. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité qu'une durée de fonctionnement dépasse t heures est $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $t = 10\,000$ et $\lambda = 0,001$, $P(T > 10\,000) = e^{-0,001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0,0000454$. Arrondie au centième, cette probabilité vaut 0,00 ; sa faible valeur exacte est indiquée pour éviter de confondre l'arrondi avec une probabilité nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir de l'échantillon de 1 000 rivets dont 975 sont conformes, donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Il y a 975 rivets conformes sur 1 000, donc $\hat{p} = \dfrac{975}{1\,000} = 0,975$. Cette fréquence est l'estimation de la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production, soit 97,5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. En utilisant la formule fournie pour l'intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95 %, déterminer l'intervalle centré sur la fréquence observée et arrondir ses bornes à 10^{-3} près.

La fréquence observée est $f = 975/1\,000 = 0,975$. La marge de l'intervalle fourni vaut $1,96\sqrt{f(1-f)/n} = 1,96\sqrt{0,975 \times 0,025/1\,000} \approx 0,009677$. Les bornes sont donc $0,975 - 0,009677 \approx 0,965323$ et $0,975 + 0,009677 \approx 0,984677$. On les arrondit chacune au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2 pour la plupart des spécialités et 3 en Traitement des matériaux. Elle évalue équations différentielles, étude de fonctions et calcul intégral à partir du freinage d'un chariot, puis probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance dans un contexte industriel.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière permet de résoudre l'équation complète.
- La limite de f(t) quand t tend vers +∞ donne l'asymptote horizontale de sa courbe si cette limite est finie.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- L'intervalle de confiance fourni est f ± 1,96√(f(1-f)/n), où f est la fréquence observée et n l'effectif.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la solution de l'équation différentielle homogène d'une solution particulière de l'équation complète.
- Pour la distance, intégrer la vitesse entre les bornes temporelles demandées et respecter l'arrondi au centimètre.
- Dans l'arbre pondéré, inscrire les probabilités conditionnelles sur les branches et distinguer P(A ∩ D) de P(D|A).
- Vérifier la cohérence des probabilités avec les données : les taux et proportions imprimés ne concordent pas avec la valeur annoncée pour P(D).

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer l'espérance d'une durée suivant une loi exponentielle ?

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance vaut 1/λ. Le paramètre étant exprimé en inverse d'heures, l'espérance s'exprime en heures et représente la durée moyenne de fonctionnement.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube fonctionne au-delà d'une durée donnée ?

À partir de P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt), on utilise l'événement complémentaire : P(T > t) = e^(-λt). Il faut exprimer t dans la même unité que celle associée au paramètre λ.

Q : Comment répartir son temps dans cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et leurs parties sont annoncées comme indépendantes. Répartissez le temps entre les exercices, avancez sur les questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier calculs, unités et arrondis.

Q : Quels arrondis et éléments de présentation faut-il respecter ?

Le sujet demande des arrondis au centième pour les probabilités de durée de vie, au centimètre pour la distance et au millième pour l'intervalle. Présentez les formules utiles et signalez l'incohérence imprimée dans la question sur P(D).

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsati.fr/assets/annales/bts-ati/E2 - Mathématiques/2022/BTS ATI - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Assistance Technique d\ : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.